II. *De Curvarum Tangentibus è Maximorum ac Minimorum Theoriâ immediatè deductis: Unâ cùm Theorem: quibuſdam ad Sectiones conicas pertinentibus, ejuſdem calculi auxilio inveſtigatis. Autore* Humphrido Dittono.

TAngentium methodum propono, facilem ſatis ac generalem, imò generaliſſimam, ut pote curvis omnibus unâ eâdemque opera inſervientem. Neque novam vocare metuo, cùm celebriorum Geometrarum nullus (in quantum unquam ſcire potui) aliquid hujus generis publici juris fecit. Pauca tantum ejus ſpecimina hîc in medium profero, nire enim tum clarâ ac apertâ exemplorum multitudine non indigetimus!

Sit Curva A G H, cujus vertex A, axis A K, ordinatim applicata F D centrumque (ſiquod habet) punctum K. Sumpto puncto L in Axe ſit $AL = n$, $AD = x$, $FD = y$, $FL = z$; quarum quantitatum, tres poſteriores ſunt fluentes, prior verò *n* permanens ac ſtabilis, hæc enim una eademque prioribus variis ſemper reſpondet. Ex Triangulo Rectangulo F D L, hanc habemus Equationem, $zz = yy + nn - 2nx + xx$; determinandoque *z* ad extremum, oritur $2y\dot{y} - 2n\dot{x} + 2x\dot{x} = 0$; unde interpretando $2y\dot{y}$ ſecundum propriam Curvæ naturam, relinquetur quantitas *n* expoſita in terminis etiam Curvæ propriis.

Cùm verò *z* hoc modò ad valorem extremum determinatam habeamus; hoc eſt, linea F L omnium quæ *a* puncto L ad Curvam duci poſſunt vel maxima vel minima ſit, indeque ad Curvam in puncto F normalis; ipſam D L eſſe ſubnormalem patet, ex quâ ſubtangens nullo negotio eruitur.

In exemplum producatur primò Parabola Apolloniana, quàm curvam hîc delineatam eſſe ſupponemus. Habemus ergo $2\,y\dot{y} = r\dot{x}$ (poſito Parametro $= r$) unde $r x - 2 n x + 2 x x = 0$, & $n = \frac{r}{2} + x$, ergoque D L ſubnormalis $= \frac{1}{2} r$. (Cujus Theorematis ſenſus hîc eſt, viz. Si ultra terminum D abſciſſæ A D, deſignetur D L ſemiparametro equalis, atque à puncto L producatur L F recta ad punctum F; recta ſic ducta Parabolæ in puncto F normalis erit, & omnium quæ à puncto L, ad Curvam duci poſſunt minima. Dico minimam; alicui enim curvæ naturam ac indolem ſcienti, apparet Maximam eſſe non poſſe (idquod in ſequentibus notatum velim) ſed neceſſario eſt vel maxima vel minima, ideoque poſterior.) Hæcque pars prior eſt Theor. 5. Lib. 7. Conicor. Præclariſſimi de La Hire.

Ducatur ordinata E B, junganturque puncta E, L; ſit intercepta $B D = f$, unde $A B = x - f$, & $B L = \frac{r}{2} + f$. Jam $L E^q = \frac{rr}{4} + r x + f f$, & $F L^q = \frac{rr}{4} + r x + f f$, & $F L^q = \frac{rr}{4} + r x$, ergo $L E^q - F L^q = B D^q$; quæ pars poſterior eſt Theorem. 5. ejuſdem Lib. Conicor.

Quò propriùs punctum F in quò curvam normalis ſecat, puncto A ſive vertici admovetur; eò propiùs etiam punctum L eidem venit. Ergo quando F cùm A coin-

A coincidit, & ſic evaneſcit ordinata F D, tunc ipſa Minima jacet in Axe A K, & ſemiparametri quantitatem adequabit. Hoc eſt in illo caſu $n = \frac{1}{2} r$ tantum; in nihilum abeunte x abſciſſâ ad ordinatam evaneſcentem pertinenta. Si ergo $AL = n = \frac{1}{2} r$, ſumpto puncto D inter A & L, fiat $AD = x$; tum oritur $FL^q = \frac{rr}{4} + xx$, ergo $FL^q - AL = xx$, hoc eſt $FL^q - AL^q = AD^q$ ſemper. Ejuſdemque tenoris eſt Theor. 2. Lib. 7. Conicor. de La Hire.

Secundò ſit curva quædam ordinis Parabolici ſuperiors, cujus æqnatio $r^{p-q} x^q = y^p$.

Tum $yy = r^{\frac{2p-2q}{p}} x^{\frac{2q}{p}}$, adeoque

$2y\dot{y} = \frac{2q}{p} r^{\frac{2p-2q}{p}} x^{\frac{2q-p}{p}} \dot{x}$; ſubſtituendoque hunc valorem loco $2y\dot{y}$ in æquatione generali determinante z ad tremum, habemus inde $n = \frac{q}{p} r^{\frac{2p-2q}{p}} x^{\frac{2q-p}{p}} + x$; & propterea ſubnormalis $DL = \frac{q}{p} r^{\frac{2p-2q}{p}} x^{\frac{2q-p}{p}}$

Hoc

Hoc verò ſingulis hiſcè curvis facillimè applicatur, ſi indices p & q ſecundum unius cujuſque naturam ac genium debito modo exponantur.

Supponetur tertiò Curvam eſſe Ellipſiu cujus ½ Axis Mador A K; ex cujus etiam equatione conſequitur $2y\dot{y} = r\dot{x} - \frac{2rx\dot{x}}{q}$. Unde provenit

$$r\dot{x} - \frac{2rx\dot{x}}{q} - 2n\dot{x} + 2x\dot{x} = 0, \&$$

$n = \frac{r}{2} + x - \frac{rx}{q}$, ac propterea $\frac{r}{2} - \frac{rx}{q}$ ſubnormali D L equalis. Sivero ellipſeos loco ſubſtitueretur Circulus, equationem eodem modo tractando, inveniemus D L = r — x, poſito *r* Circuli Radio æquali.

Sed ad Ellipſiu revertendum, cujus alia proprietas ex hoc fonte deducenda eſt, prout in Parabolâ factum. Sit B D = f, unde A B = x — f. Habemus LE^{q} $(= LB^{q} + EB^{q}) = \frac{rr}{4} - \frac{rrx}{q} + \frac{rrxx}{qq} + ff + rx - \frac{rxx}{q} - \frac{rff}{q}$: & FL^{q} $(= FD^{q} + LD^{q}) = rx - \frac{rxx}{q} + \frac{rr}{4} - \frac{rrx}{q} + \frac{rrxx}{qq}$: Ergo, $LE^{q} - LF^{q} = ff - \frac{rff}{q}$;

Hoc verò eſt Theor. 6. Lib. 7. Conic. de La Hire.

Poſtulat enim Geometra ille ſublimis, ut ſit q. r. $\frac{q}{2} - x$ :: L D, cujus valor eſt $\frac{r}{2} - \frac{rx}{q}$ prout ſupra inventum; ideoque quarta proportionalis eſt tribus aute poſitis: Hoc verò ei conceſſo, L F eſſe minimam omnium rectarum quæ à puncto L ad Ellipſiu duci poſſunt evidenter demonſtrat. Preterea quoniam eſt $q : q - r :: f : f : f - \frac{fr}{q}$, Ergo $\sqsubset\!\sqsupset\, ff - \frac{rff}{q}$ ſive $f \times f - \frac{fr}{q}$, idem eſt quòd rectangulum apud D De La Hire exemplar vocatum: Hoc verò exemplar ſecundum ejus definitionem, eſt Rectangulum ſimile Rectangulo, differentiam inter Quadratum Axis Tranſverſi & Figuram conſtituenti (hoc eſt Rectangulo $qq - qr$) & preterea ad Rectam B D ſive f applicatum. Et quòd Rectangulum $ff - \frac{rff}{q}$ omnes haſce conditiones poſſideat, luce Meridianâ Clarius eſt.

Notetur, ex valore quantitatis n ſupra invento, planè conſequi $n > \frac{r}{2}$. Nam $n = \frac{r}{2} + x + \frac{rx}{q}$, ergo $qn + rx = \frac{qr}{2} + qx$, ſed (propter $q > r$) $qx > rx$, ergo, $qn > \frac{qr}{2}$, & $n > \frac{r}{2}$.

Quando (ut in Parabola modò obſervatum) punctum F in A verticem incidit, ipſa Minima in Axe deſignatur; & propter evaneſcentem x, habemus $n = {}^{r}$: Aſſumptoque quovis puucto D inter A & L, ſi $AD =$ alicui x, comparando emergit $FL^q - AL^q = xx - \frac{rxx}{q}$; quòd ipſum eſt Theor. 3. Lib. 7. Conic.

D. La

D. La Hire. Quoniam enim eſt $q : q - r :: x : x - \frac{rx}{q}$, patet $\square\, xx - \frac{rxx}{q}$ eſſe exemplar, ſed applicatum ad abſciſſam x ; & preterea hoc eſſe menſuram adequatam deſectûs, quadrati Minimæ à quadrato cujus vis rectæ alterius, ab eodem puncto ad curvam protenſæ ; hæcque demonſtrat ille loco citato.

Theoremata verò ad Axem minorem ſive conjugatum ellipſeos ſpectantia (hactenus enim majore ſive Tranſverſo uſi ſuimus) eodem planè modo determinantur. Sit jam A K ½ Axis Minoris $= \frac{c}{2}$, Parameter $= R$; punctum L jam ultra centrum, adalteras partes G K collocari ſupponitur. Operando ut priùs, invenietur A L ſive $n = \frac{R}{2} + x - \frac{Rx}{c}$, & ſubnormalis $DL = \frac{R}{2} - \frac{Rx}{c}$; Hoc eſt $c : R :: \frac{c}{2} - x : \frac{R}{2} - \frac{Rx}{c}$, adeoque ducta F L omnium quæ à puncto L ad ellipſin duci poſſunt Maxima, & $LF^q - LE^q = \frac{Rff}{c} - ff =$ Rectangulo exemplar ad B D (ſive f) applicato. Quòd verò hoc ſit exemplar, patet, eſt enim $c : R - c :: f : \frac{Rf}{c} - f$, adeoque ex definitione, $\frac{Rf}{c} - f \times f =$ Exemplari. Hoc verò Theor. eſt 7 Lib. 7 Conicor. De La Hire.

Iterum ;

Iterum; Puncto F cùm A coincidente; propter evaneſcentem x evaneſcentis tunc temporis ordinatæ, relinquitur $n = \frac{R}{2}$, & A L omnium quæ à puncto L ad Ellipſin dùci poſſunt Maxima, & $AL^q - FL^q = \frac{Rxx}{c} - xx =$ Exemplari ad A D ſive x applicato; eodemque modo ſonat. Theor. 4. Lib. prędicti Conicorum.

Obſervandum verò ad caſum precedentem (quòd priùs ergo notari debuit) ubi invenimus $n = \frac{R}{2} + x - \frac{Rx}{c}$, quòd $n < \frac{R}{2}$; nam $cn + Rx = \frac{R}{2}c + cx$, & propter $R > c$, adeoque $Rx > cx$, relinquitur $cn < \frac{Rc}{2}$, & $n < \frac{R}{2}$.

Jam verò ut res in Ellipſi peracta eſt, ſic eodem prorſus modo in Hyperbola peragenda foret, Minimæque in hâc curvâ lineæ determinandæ: ſed talis inter haſce curvas connectio, tam faciliſque ab unâ ad alteram tranſitus, ut vel Tyronibus ipſis labor inanis videatur. Nil aliud reſtat, v. gr. ad ſubnormalem determinandam, quàm ut ſignum − in + mutetur. Nam cùm in Hyperbolâ ſit $2y\dot{y} = r\dot{x} + \frac{2rx\dot{x}}{q}$, & $n = \frac{r}{2} + x + \frac{rx}{q}$ (æquatione generali) manet $DL = \frac{r}{2} + \frac{rx}{q}$.

Concipietur Quartò Curvam M S N (in altera Fig. Fig. parte delin. Eſſe unam ex Hyperboloidibus, cujus Aſymptoti A K, K H, rectamque S R ad Aſymptoton K H ordinatam, S R ſit $= y$, S P $= z$, K R $= x$, K P $= n$, quæ hic neceſſariò minor erit quàm x, ut conſideranti patet. Equatio curvæ propria eſt $y^p x^q = r^q s^p$ cujus loco (propter r & s quantitates determinatas) ſcribi poſſit $y^p = x^{-q}$, adeoque $y^2 = x^{\frac{-2q}{p}}$, & $2y\dot{y} = -\frac{2q}{p}\dot{x}x^{\frac{-2q-p}{p}}$; hinc cum $zz = yy + xx - 2nx + nn$, pro extremo habemus $2y\dot{y} + 2x\dot{x} - 2n\dot{x} = 0$, hoc eſt $-\frac{2q}{p}\dot{x}x^{\frac{-2q-p}{p}} + 2x\dot{x} = 2n\dot{x}$, & $n = x - \frac{q}{p}x^{\frac{-2q-p}{p}}$ adeoque ſubnormalis P R $(= x - n) = \frac{q}{p}x^{\frac{-2q-p}{p}}$.

Curvam jam A F G (ultimo loco) Cycloiden primariam concipiamus; ſitque *r* Radius, *c* Arcus & *y* ordinata Circuli genitoris, cujus Diameter per A K repreſentatur centrumque inter L & K poſitum. Tum vocatâ F D cycloidis ordinatâ *a*, cæteriſque ut priùs; curvæ equatio eſt $aa = yy + 2cy + cc$, adeoque $zz\ (= aa + nn - 2nx + xx) = yy + 2cy + cc + nn - 2nx + xx$, & (*z* ad extremum determinatâ)

natâ) $2y\dot{y} + 2c\dot{y} + 2y\dot{c} + 2cc - 2nx + 2xx = 0$.

Eſt verò $\dot{y} = \frac{r\dot{x} - x\dot{x}}{y}$, & $\dot{c} = \frac{r\dot{x}}{y}$, ergo hos valores ſubſtituendo, ac equationem debitè reducendo, habemus $2r - + \frac{2rc - 2xc}{y} + 2r + \frac{2cr}{y} = 2n - 2x$; ac propterea $2r - x + \frac{2rc - xc}{y} = n - x = DL$. ſubnormali.

Incomparabilis D. Barovius ſubtangente præcognitâ, ad Maximum & Minimum determinandum utitur; hocque idem poſt eum fecit D. Neiwentiit in ſuâ infinitorum Analyſi. Cùm verò multis aliis Methodis, in quibus nihil omnino de Curvarum Tactione preſupponitur, Maximum ac Minimum inveniri queant, palàm eſt è Maximis & Minimis ad Tangentes determinandas, tutò ac legittimè procedere poſſe.

COROLL. I.

EXempla hactenus oblata percurrenti, in ſingulis patebit, quòd $2y\dot{y} - 2n\dot{x} + 2x\dot{x} = 0$, poſito nempè loco *n* in hâc equatione, valore ejus ſecundum curvæ naturam, In Hyperboloidibus ergo ex.gr. $\frac{2q}{p} \cdot xx^{-\frac{2q-p}{p}} - 2xx + \frac{2q}{p} \cdot xx^{-\frac{2q-p}{p}} + 2xx = 0$,

quod (ipſo oculo judice) manifeſtum eſt ; & ſic in aliis (ſine ullâ demonſtratione) veritas facilè perſpicietur.

COROLL. II.

EX ſubnormalium inventione, curvarum ordinatas Maximas & Minimas facile determinabimus. Hâcque in re dico, ſi ſubnormalis (pro aliquo curvæ puncto) nihilo ponatur equalis, habemus ordinatam iſtius curvæ ad extremum determinatam ; & quidam maximam ſi ad partes curvæ concavas, minimam verò ſi ad convex applicari intelligatur. Ex. gr. in Circulo (poſitâ ſubnormali $= l$) eſt $l = r - x$; ſit $r - x = 0$; ergo $r = x$, ac nide $y = r$, hoc eſt applicata maxima Radio equalis. Similiter in Ellipſi, $l = \frac{r}{2} - \frac{rx}{q}$; ſit $\frac{r}{2} - \frac{rx}{q} = 0$, tum $rq = 2rx$, ac $x = \frac{q}{2}$, ergo $yy = \frac{rq}{4}$ = 4tæ parti Figuræ (utivocant) ſive ſemiaxis conjugati quadrato, adeque maxima $y =$ iſti ſemaxi. Nec Methodo diſſimili cùm aliis curvis operandum foret ; inveniatur ſubnormalis ex equatione datâ, itâque nihilo equali

equali poſitâ, ordinatam curvæ maximam vel minimam determinatam habebimus; priorem ad partem curvæ verſus axem concavam, poſteriorem ad convexam.

POSTSCRIPTUM

Prioribus ſequentia hæc (notatu non indigna) adjungi poſſunt.

PRimò æquè facilè hâc methodo determinari Tangentem, ad partes curvæ convexas operando, ac ad partes concavas uti priùs. Sit enim A C Tangens verticalis inque eâ ad libitum ſumpto puncto C, ſit $AC = n$, $CO = z$ (quò etiam charactere omnes lineæ, à puncto C ad curvam convexam A E G ductæ, inſigniantur) ergo ductâ M O ſemper ad A C perpendiculari, erit $CM = n - y$, & cùm $OM = x$, erit $zz = nn - 2ny + yy - xx$, adeoque (pro extremo ipſius z valore) $2y\dot{y} + 2x\dot{x} - 2n\dot{y} = 0$. In quâ equatione ſi exponatur $2x\dot{x}$ ſecundum curvæ naturam, lineam C Z (quæ hoc loco ſubnormalis vicem ſubibit) determinatam dabimus. Res clarior eſt quàm quæ exemplis Illuſtrantibus indigeat; quæque jamjam dicta ſunt facile hoc opus excuſabunt.

Secundò, Sicut Methodo priore, (Curvarum Tangentes invenimus) ipſus lineas L E vel C O à puncto dato vel in Axe vel in Tangente verticali ſumpto productas, ad extremum determinando; ſic etiam conſiderando lineas Q E, &c. à puncto in Axe dato ultra verticem productas, idem (idque Univerſaliter) perficere poſſumus. Omnes enim lineæ Q E valoris fluentis ſunt ac perpetuò mutabilis, ſola verò Tangens Q F (poſito quòd Q F curvam tangat) ſtabilis eſt ac ad unicum valorem determinata. Hoc ergo loco, τῷ extremi Hypotheſi non innitemur, ſed quantitatem permanentem tantùm ſpeculabimur. Aſſumantur duo puncta Q L, indeque ad idem curvæ punctum E duæ ſemper lineæ ducantur L E, Q E. Inter punctum F contactus ac verticem, angulus Q E L ſemper erit obtuſus, ad alteras verò partes puncti F acutus erit, ſuppoſito (quod priùs monitum) Q F curvam tangere, ac F L ei ad angulos rectos inſiſtere. Sit Q A = p. A L = n. A B = x. B E = y. Q E = z. V E (intercepta inter punctum E & V ubi cadit Q V perpendicularis ab Q in L E productam) = v. Jam propter Triangulum obtuſangulum Q E habemus hanc equationem

$$zz = p^2 + 2pn - y^2 - x^2 + \overline{\qquad y^2 + n^2 - 2nx + xx}\,\big|^{\frac{1}{2}}$$

$\times\ 2v$; ſive loci $\overline{y^2 + n^2 - 2nx + xx}\,\big|^{\frac{1}{2}}$ ſcribendo f, eſt $zz = p^2 + 2pn - y^2 - x^2 + 2nx - 2fv$, ideoque

$$2z\dot{z} = 2y\dot{y} - 2x\dot{x} + 2n\dot{x} - 2f\dot{v} - 2v\dot{f}.$$

Si z jam fiat quantitas ſtabilis, quò in Caſu Q E cùm Q F tangente coincidet, erit tum

$-2y\dot{y} - 2x\dot{x} + 2n\dot{x} = 0$ (rectangulo 2 f v ejuſque adeo fluxione penitus evaneſcente.) Hæc verò eſt ipſa equatio Generalis Methodo ſuperiori determinata,

quæque

quæque uti-videmus non minus facilè ac naturaliter ex hoc ſuppoſito quantitatis ſtabilis principio, quàm ex illo extremi deducitur.